

エンドフェッドアンテナの検討

参考資料 1

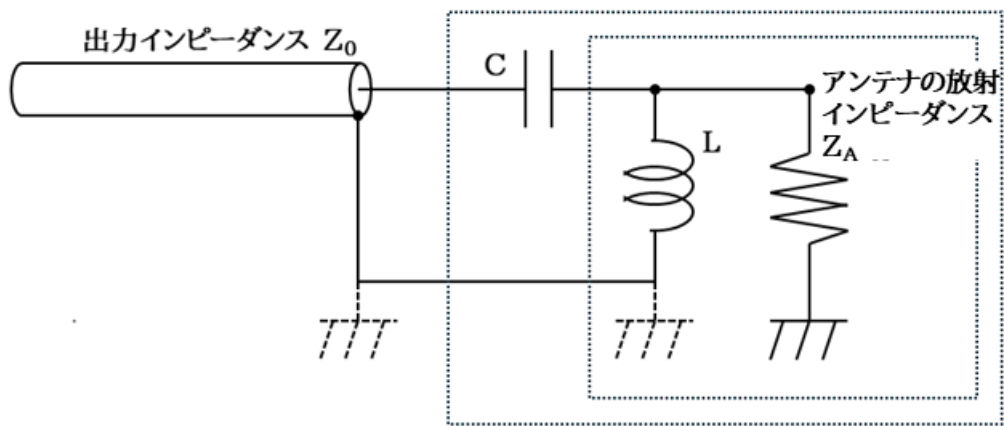
インピーダンスマッチングLC回路の定数の求め方 (覚書)

送信機の出カインピーダンス Z_o 、アンテナの放射インピーダンス Z_A 、設定周波数 f_0 、設定角周波数 $\omega_0 = 2\pi f_0$ のとき、下記のインピーダンスマッチング回路の定数は、

$$L = \frac{Z_A}{\omega_0} \sqrt{\frac{Z_o}{Z_A - Z_o}}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{Z_o(Z_A - Z_o)}}$$

で表わされる。



このとき、LC回路の共振周波数 $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ と、共振角周波数 $f_R = \frac{\omega_R}{2\pi}$ は、

$$LC = \frac{Z_A}{\omega_0} \sqrt{\frac{Z_o}{Z_A - Z_o}} \frac{1}{\omega_0 \sqrt{Z_o(Z_A - Z_o)}} = \frac{Z_A}{\omega_0^2(Z_A - Z_o)}$$

従って、

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \sqrt{\frac{Z_A - Z_o}{Z_A}} \quad f_R = \frac{\omega_R}{2\pi}$$

即ち、LC共振周波数は、設定した周波数よりも、若干低めとなる。

コイル L と放射抵抗 Z_A の並列回路の合成インピーダンス Z_{LZA} は、

$$\begin{aligned} Z_{LZA} &= \frac{Z_A j\omega_0 L}{Z_A + j\omega_0 L} \\ &= \frac{Z_A j\omega_0 L}{Z_A + j\omega_0 L} \frac{Z_A - j\omega_0 L}{Z_A - j\omega_0 L} \\ &= \frac{\omega_0^2 L^2 Z_A + j\omega_0 L Z_A^2}{Z_A^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

C も含めた全体のインピーダンスは、

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{j\omega_0 C} + \frac{\omega_0^2 L^2 Z_A + j\omega_0 L Z_A^2}{Z_A^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{\omega_0^2 L^2 Z_A}{Z_A^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\frac{\omega_0 L Z_A^2}{Z_A^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega_0 C} \right) \end{aligned}$$

設定角周波数 ω_0 に於いてリアクタンス成分を0とするため、 j の係数 = 0

$$\frac{\omega_0 L Z_A^2}{Z_A^2 + \omega_0^2 L^2} - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

$$\frac{\omega_0 L Z_A^2}{Z_A^2 + \omega_0^2 L^2} = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$Z_A^2 + \omega_0^2 L^2 = \omega_0^2 L C Z_A^2$$

このとき、 $Re(Z) = Z_o$ であるから、

$$\frac{\omega_0^2 L^2 Z_A}{Z_A^2 + \omega_0^2 L^2} = Z_o$$

$$\omega_0^2 L^2 Z_A = Z_o (Z_A^2 + \omega_0^2 L^2)$$

$$L^2 = \frac{Z_o Z_A^2}{\omega_0^2 (Z_A - Z_o)}$$

$$L = \frac{Z_A}{\omega_0} \sqrt{\frac{Z_o}{Z_A - Z_o}}$$

同様にCについても

$$Z_A^2 + \omega_0^2 L^2 = \omega_0^2 L C Z_A^2 \quad \frac{\omega_0^2 L^2 Z_A}{Z_A^2 + \omega_0^2 L^2} = Z_o \text{ から、}$$

$$\frac{L}{C Z_A} = Z_o$$

$$C = \frac{1}{Z_A Z_o} \frac{Z_A}{\omega_0} \sqrt{\frac{Z_o}{Z_A - Z_o}} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{Z_o (Z_A - Z_o)}}$$

LとCとの共振周波数 f_R

$$\begin{aligned} LC &= \frac{Z_A}{\omega_0} \sqrt{\frac{Z_o}{Z_A - Z_o}} \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{Z_o (Z_A - Z_o)}} \\ &= \frac{1}{\omega_0^2} \frac{Z_A}{Z_A - Z_o} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_R &= \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{Z_A}{Z_A - Z_o}}} \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\frac{Z_A - Z_o}{Z_A}} \\ &= f_0 \sqrt{\frac{Z_A - Z_o}{Z_A}} \end{aligned}$$

つまり、 L と C の共振周波数 f_R は、設定周波数 f_0 の $\sqrt{\frac{Z_A - Z_o}{Z_A}}$ 倍に設定することになる。

数値例

$$f_0 = 7.10 \text{ MHz}$$

$Z_A = 2500 \text{ k}\Omega$	$L = 8.006 \mu\text{H}$	$C = 64.05 \text{ pF}$	$f_R = 7.029 \text{ MHz}$
$Z_A = 3000 \text{ k}\Omega$	$L = 8.775 \mu\text{H}$	$C = 58.37 \text{ pF}$	$f_R = 7.041 \text{ MHz}$
$Z_A = 3500 \text{ k}\Omega$	$L = 9.445 \mu\text{H}$	$C = 53.97 \text{ pF}$	$f_R = 7.049 \text{ MHz}$

$$f_0 = 21.3 \text{ MHz}$$

$Z_A = 2500 \text{ k}\Omega$	$L = 2.669 \mu\text{H}$	$C = 21.35 \text{ pF}$	$f_R = 21.09 \text{ MHz}$
$Z_A = 3000 \text{ k}\Omega$	$L = 2.918 \mu\text{H}$	$C = 19.46 \text{ pF}$	$f_R = 21.12 \text{ MHz}$
$Z_A = 3500 \text{ k}\Omega$	$L = 3.148 \mu\text{H}$	$C = 17.99 \text{ pF}$	$f_R = 21.15 \text{ MHz}$

$$f_0 = 50.2 \text{ MHz}$$

$Z_A = 2500 \text{ k}\Omega$	$L = 1.132 \mu\text{H}$	$C = 9.058 \text{ pF}$	$f_R = 49.70 \text{ MHz}$
$Z_A = 3000 \text{ k}\Omega$	$L = 1.238 \mu\text{H}$	$C = 8.255 \text{ pF}$	$f_R = 49.78 \text{ MHz}$
$Z_A = 3500 \text{ k}\Omega$	$L = 1.336 \mu\text{H}$	$C = 7.633 \text{ pF}$	$f_R = 49.84 \text{ MHz}$

$$f_0 = 145 \text{ MHz}$$

$Z_A = 2500 \text{ k}\Omega$	$L = 0.392 \mu\text{H}$	$C = 3.136 \text{ pF}$	$f_R = 143.54 \text{ MHz}$
$Z_A = 3000 \text{ k}\Omega$	$L = 0.429 \mu\text{H}$	$C = 2.868 \text{ pF}$	$f_R = 143.79 \text{ MHz}$
$Z_A = 3500 \text{ k}\Omega$	$L = 0.462 \mu\text{H}$	$C = 2.643 \text{ pF}$	$f_R = 143.96 \text{ MHz}$

さらに、 $Z_A = R_A + jX_A$ と置いた場合

Z_{LZA} の式に $Z_A = R_A + jX_A$ を代入し、

$$\begin{aligned} Z_{LZA} &= \frac{(R_A + jX_A)j\omega_0 L}{(R_A + jX_A) + j\omega_0 L} \\ &= \frac{-\omega_0 L X_A + j\omega_0 L R_A}{R_A + j(\omega_0 L + X_A)} \frac{R_A - j(\omega_0 L + X_A)}{R_A - j(\omega_0 L + X_A)} \\ &= \frac{-\omega_0 L X_A R_A + \omega_0 L R_A (\omega_0 L + X_A) + j(\omega_0 L X_A (\omega_0 L + X_A) + \omega_0 L R_A^2)}{R_A^2 + (\omega_0 L + X_A)^2} \\ &= \frac{-\omega_0^2 L^2 R_A + j\omega_0 L (\omega_0 L X_A + X_A^2 + R_A^2)}{R_A^2 + (\omega_0 L + X_A)^2} \end{aligned}$$

C も含めた全体のインピーダンスは、

$$Z = \frac{1}{j\omega_0 C} + \frac{-\omega_0^2 L^2 R_A + j\omega_0 L (\omega_0 L X_A + X_A^2 + R_A^2)}{R_A^2 + (\omega_0 L + X_A)^2}$$

実部と虚部は各々、

$$\text{Re}(Z) = \frac{\omega_0^2 L^2 R_A}{R_A^2 + (\omega_0 L + X_A)^2} \quad \text{Im}(Z) = \frac{\omega_0 L (\omega_0 L X_A + X_A^2 + R_A^2)}{R_A^2 + (\omega_0 L + X_A)^2} - \frac{1}{\omega_0 C}$$

送信機の出カインピーダンス Z_o は、 $Z_o = R_o + j0$ であるから、

$$\text{Re}(Z) = \frac{\omega_0^2 L^2 R_A}{R_A^2 + (\omega_0 L + X_A)^2} = R_o \quad \text{Im}(Z) = \frac{\omega_0 L (\omega_0 L X_A + X_A^2 + R_A^2)}{R_A^2 + (\omega_0 L + X_A)^2} - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

$\text{Re}(Z)$ の式より、

$$\begin{aligned} \omega_0^2 L^2 R_A &= R_o R_A^2 + R_o (\omega_0^2 L^2 + 2\omega_0 L X_A + X_A^2) \\ \omega_0^2 L^2 R_A^2 - R_o R_A^2 - \omega_0^2 L^2 R_o - 2\omega_0 L X_A R_o - X_A^2 R_o &= 0 \\ \omega_0^2 (R_A - R_o) L^2 - 2\omega_0 X_A R_o L - R_o (R_A^2 + X_A^2) &= 0 \end{aligned}$$

L についての2次方程式なので、

$$\begin{aligned} L &= \frac{\omega_0 X_A R_A + \sqrt{(\omega_0 X_A R_o)^2 + \omega_0^2 (R_A - R_o) R_o (R_A^2 + X_A^2)}}{\omega_0^2 (R_A - R_o)} \\ &= \frac{\omega_0 X_A R_A + \omega_0 \sqrt{R_A R_o (R_A^2 + X_A^2 - R_A R_o)}}{\omega_0^2 (R_A - R_o)} \\ &= \frac{X_A R_A + \sqrt{R_A R_o (R_A^2 + X_A^2 - R_A R_o)}}{\omega_0 (R_A - R_o)} \end{aligned}$$

$\text{Im}(Z)$ の式より、

$$\omega_0^2 L C (\omega_0 L X_A + X_A^2 + R_A^2) = R_A^2 + (\omega_0 L + X_A)^2$$

$$C = \frac{R_A^2 + (\omega_0 L + X_A)^2}{\omega_0^2 L(\omega_0 L X_A + X_A^2 + R_A^2)}$$

$X_A = 0$ の場合の確認

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{R_A R_o (R_A^2 - R_A R_o)}}{\omega_0 (R_A - R_o)} \\ &= \frac{R_A \sqrt{(R_o (R_A - R_o))}}{\omega_0 (R_A - R_o)} \\ &= \frac{R_A}{\omega_0} \sqrt{\frac{R_o}{R_A - R_o}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{R_A^2 + \omega_0^2 L^2}{\omega_0^2 L R_A^2} \\ &= \frac{R_A^2 + \omega_0^2 \frac{R_A^2}{\omega_0^2} \frac{R_o}{R_A - R_o}}{\omega_0^2 \frac{R_A}{\omega_0} \sqrt{\frac{R_o}{R_A - R_o}} R_A^2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{\frac{R_o}{R_A - R_o}}}{\omega_0 R_A} \\ &= \frac{R_A - R_o + R_o}{\omega_0 R_A \sqrt{R_o (R_A - R_o)}} \\ &= \frac{1}{\omega_0 \sqrt{R_o (R_A - R_o)}} \end{aligned}$$

以上

2024.04.05